Klausur, **Statistische Physik**

geschrieben am 26. Januar 2012

Name, Vorname	Matrikelnummer	Semester	Punktzahl

Aufgabe 1 *Zehn Kurzfragen* (10 Punkte)

Falls nicht ausdrücklich verlangt, bitte keine Rechnungen oder Erklärungen, nur kurze Antworten.

a. Wie groß ist die Entropie eines Systems von N Zuständen mit einer gleichförmigen Wahrscheinlichkeitsverteilung?

b. Zwei Systeme mit Zustandssummen Z_1 und Z_2 werden ohne Wechselwirkung kombiniert. Was ist die totale Zustandssumme Z ?

c. Kann die Fugazität negative sein? Wieso (nicht)?

d. Falls der Hamilton-Operator spin-unabhängig ist: Welchen Einfluss hat der Spin j eines Fermions auf seine Zustandsdichte?

e. Welchen beiden Typen von (langsamen) Prozessen bilden den Carnot-Zyklus?

f. Welche Größe wird durch die Clausius-Clapeyron-Gleichung bestimmt?

g. Welche mathematische Operationen bewirken den Übergang von der Energie U zur freien Enthalpie G ?

h. Zu welchem Wert strebt die Ising-Modell-Zustandssumme für N Spins, wenn die Temperatur nach unendlich geht?

i. Was ist der thermodynamische Limes?

j. Ist die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung symmetrisch um ihr Maximum? Warum (nicht)?

Problem 2 *Fiktive Thermodynamik* (8 Punkte)

Wir erfinden ein ideales Gas, welches im klassischen Grenzwert für große N charakterisiert ist durch eine (hypothetische) freie Energie

$$F(V, N, \tau) \; = \; \tau N \Big(\ln \frac{N}{V} - \frac{\tau}{\tau_0} - 1 \Big) \; ,$$

wobei V das dem Gas zugängliche Volumen, N die mittlere Anzahl der Gasteilchen, τ die Temperatur und τ_0 eine positive Konstante ist.

a. Berechnen Sie die interne Energie $U(V, N, \tau)$, den Druck $p(V, N, \tau)$ und die Entropie $\sigma(V, N, \tau)$.

b. Wie viel Arbeit W ist mindestens erforderlich, um das Gas von einem Volumen V_1 auf ein Volumen V_2 zu komprimieren, wobei die Temperatur τ und die Teilchenzahl N konstant gehalten werden?

c. Lassen Sie nun im Unterschied das Gas isentropisch (d.h. ohne Entropieänderung) expandieren, vom Volumen V_2 zurück zum Volumen V_1. Die Teilchenzahl N soll dabei unverändert bleiben. Wenn die Ausgangstemperatur (bei V_2) den Wert τ hat, wie groß wird die Endtemperatur τ' (bei V_1) sein?

Aufgabe 3 *Kanonische Ensembles* (12 Punkte)

Betrachte Sie ein Quantensystem, dessen Hamilton-Operator einen nichtentarteten Eigenwert 0, einen Eigenwert $\epsilon > 0$ mit zweifacher Entartung und *keine weiteren* Eigenwerte besitzt.

a. Nehmen Sie an, das System sei im thermodynamischen Gleichgewicht bei einer Temperatur τ. Drücken Sie die mittlere innere Energie U und die Entropie σ durch ϵ und τ aus.

b. Wir bezeichnen dieses System als „Teilchen". Betrachten Sie zwei solche Teilchen im thermischen Gleichgewicht bei einer Temperatur τ und nehmen Sie an, es seien (ununterscheidbare) *Bosonen* ohne Wechselwirkung. Geben Sie die erwartete innere Energie U an.

c. Lassen Sie nun die Anzahl dieser Bosonen variieren, wobei die Teichen sowohl in thermischem Gleichgewicht (bei Temperatur τ) als auch in diffusivem Gleichgewicht mit Fugazität λ seien. Geben Sie die große Zustandssumme (Gibbs-Summe) $\mathcal{Z}$ und die mittlere innere Energie U an.

d. Nehmen Sie alternativ an, dass es sich bei den Teilchen um *Fermionen* handelt. Wiederum sollen sie im thermischen Gleichgewicht bei Temperatur τ und in diffusiven Gleichgewicht mit Fugazität λ sein. Berechnen Sie die große Zustandssumme (Gibbs-Summe) $\mathcal{Z}$ und die mittlere Teilchenzahl N.

Hinweis: Erinnerung an $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$.

Dauer: 180 Minuten **Summe: 30 Punkte** **Viel Erfolg!**